მათემატიკა - II ვარიანტი

ზოგადი ხასიათის მითითებები

შეფასებისას ქულა არ აკლდება შემდეგ შემთხვევებში:

1) თუ ამოცანის პასუხი წარმოდგენილია რიცხვითი გამოსახულების სახით, მაგრამ არ არის გამარტივებული;
2) ამოცანის ამოხსნის ბოლო ეტაპზე პასუხის გამოთვლის დროს დაშვებულია მექანიკური ხასიათის შეცდომა;

ერთი ქულა აკლდება შემდეგ შემთხვევაში:

თუ შეფასების სქემის რომელიმე კომბინაცია არ სრულდება მექანიკური ხასიათის ერთი შეცდომის გამო, მაშინ ამოცანის ამოხსნა შეფასდება ამ კომბინაციის შესაბამის ქულას მინუს ერთი ქულა.

მექანიკური ხასიათის შეცდომებია:

ა) არითმეტიკულ გამოთვლაში დაშვებული შეცდომა, რომელიც ტექნიკური თვალსაზრისით არ იწვევს ამოცანის არსებით გამარტივებას;

ბ) ტოლობის გადაწერისას რომელიმე წევრის ნიშნის ან კოეფიციენტის არასწორად გადატანა ან გამოტოვება, რომელიც ტექნიკური თვალსაზრისით არ იწვევს ამოცანის არსებით გამარტივებას.

შეფასების სქემაში შემდეგი სიტყვები: “გამოთვლა”, “პოვნა”, “მიღება”, „პასუხი“, გულისხმობს, რომ შედეგი მიღებულია დასაბუთებული მსჯელობით.

პასუხები

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
ა	გ	ბ	ა	ბ	დ	გ	დ	ბ	გ	ბ	ა	დ	გ

15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
ა	ბ	ა	დ	ბ	გ	ა	ა	დ	გ	დ	გ	დ

(2) 28.

ამოხსენით განტოლება

$$|3x-7|=\frac{2}{3}\ .$$

ამოხსნა

$$|3x-7|=\frac{2}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x-7=\frac{2}{3} \\ 3x-7=-\frac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{23}{9} \\ x=\frac{19}{9} \end{array}\right.$$

პასუხი: $x=\frac{23}{9}$ ან $x=\frac{19}{9}$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) განიხილა $3x-7=\frac{2}{3}$ და $3x-7=-\frac{2}{3}$ განტოლებები;
ბ) განიხილა ა) პუნქტში მითითებული ერთ-ერთი განტოლება და იპოვა მისი ამონახსნი;
გ) პასუხი

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა; ან ბ;
2 ქულა - ა, გ.

შენიშვნა. თუ სწორად ამოხსნა უტოლობა $|3x-7|\geq\frac{2}{3}$, ან $|3x-7|>\frac{2}{3}$, ან $|3x-7|\leq\frac{2}{3}$, ან $|3x-7|<\frac{2}{3}$, იწერება 1 ქულა.

(2) 29.

გარკვეული ტვირთის გადაზიდვა საჭიროა 350 კმ მანძილზე. ყოველ კილომეტრზე ამ ტვირთის გადაზიდვა რკინიგზით ღირს 5 ლარი, ხოლო ავტოტრანსპორტით ღირს 7 ლარი. ამასთან, დამატებითი ხარჯი (ჩატვირთვა-გადმოტვირთვის ხარჯი) რკინიგზით გადაზიდვისას შეადგენს 340 ლარს, ხოლო ავტოტრანსპორტით გადაზიდვისას შეადგენს 90 ლარს. რომელი ტრანსპორტით არის უფრო იაფი ამ ტვირთის გადაზიდვა და რამდენი ლარით?

ამოხსნა

რკინიგზით ტვირთის გადაზიდვის ხარჯი $340+5\cdot 350=2090$ ლარის ტოლია, ხოლო ავტოტრანსპორტით გადაზიდვისას $90+7\cdot 350=2540$ ლარის ტოლი. ამ ტვირთის გადაზიდვა რკინიგზით უფრო იაფია 2540-2090=450 ლარით.

ამოხსნის ეტაპები

ა) გამოთვალა რკინიგზით ან ავტოტრანსპორტით ტვირთის 350 კილომეტრზე გადაზიდვის ხარჯი;

ან შეადგინა შესაბამისი გამოსახულება (მაგ. $340+5\cdot 350$);

ან გამოთვალა $2\cdot 350=700$ ლარი და $340-90=250$ ლარი.

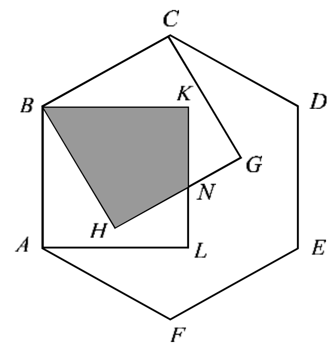
ბ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა;

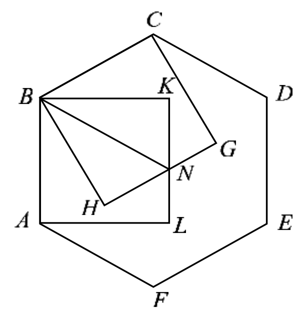
2 ქულა - ა, ბ.

(3) 30.



$ABCDEF$ წესიერი ექვსკუთხედის AB და BC გვერდებზე აგებულია ორი კვადრატი ისე, როგორც სურათზეა მითითებული. იპოვეთ კვადრატების თანაკვეთით შექმნილი გამუქებული ფიგურის ფართობი, თუ ექვსკუთხედის გვერდი a-ს ტოლია.

ამოხსნა



რადგან $\angle ABC = 120°$, ამიტომ $\angle ABH = \angle CBK = 120° - 90° = 30°$ და $\angle HBK = 60°$. მართკუთხა BHN და BKN სამკუთხედებს ჰიპოტენუზა და კათეტები BH და BK ტოლი აქვს, ამიტომ ისინი ტოლია. აქედან ვღებულობთ $\angle NBH = \angle NBK = 30°$,

$$S_{HBKN} = 2S_{BKN} = BK \cdot KN = a^2 tg\angle NBK = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}.$$

პასუხი: $S_{HBKN} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$

ამოხსნის ეტაპები

ა) გამოთვალა $\angle CBK$ ან $\angle ABH$ ან $\angle KBH$ ან KH;
ბ) გამოთვალა HN, KN, BN მონაკვეთებიდან ერთ-ერთი;
გ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა ;
2 ქულა - ა, ბ;
3 ქულა - ა, ბ, გ.

შენიშვნა. თუ შეამჩნია, რომ $S_{BKN} = S_{BCM}$, სადაც M არის (BK) და (CG) წრფეების გადაკვეთის წერტილი, გამოითვალა $S_{BCM} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$ და დაწერა პასუხი, იწერება 3 ქულა.

(3) 31.

გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამი გამოითვლება ფორმულით $S_n = \frac{2^{n+2}-4}{2^{n-1}}$. ამასთან ამ პროგრესიის ერთ-ერთი წევრი $\frac{1}{8}$ -ის ტოლია. იპოვეთ ამ წევრის ნომერი.

ამოხსნა 1

გეომეტრიული პროგრესიის n -ური წევრი აღვნიშნოთ b_n -ით. გვაქვს $b_1 = S_1 = \frac{8-4}{1} = 4$ და $b_1 + b_2 = S_2 = \frac{16-4}{2} = 6$. ამიტომ $b_2 = S_2 - S_1 = 6-4 = 2$. $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{2}$.

$b_n = b_1 q^{n-1}$, $4 \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{8} \Rightarrow n = 6$.

პასუხი: $n = 6$.

ამოხსნა 2

თუ $n \geq 2$ მაშინ $b_n = S_n - S_{n-1} = \frac{2^{n+2}-4}{2^{n-1}} - \frac{2^{n+1}-4}{2^{n-2}} = \frac{4}{2^{n-1}} = \frac{1}{8} \Rightarrow n = 6$

პასუხი: $n = 6$.

ამოხსნა 3

გეომეტრიული პროგრესიის წევრთა ჯამის ფორმულით $S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{2^{n+2}-4}{2^{n-1}}$.

ამიტომ $S_n = \frac{b_1}{q-1} \cdot q^n - \frac{b_1}{q-1} = \frac{2^{n+2}-4}{2^{n-1}} = -8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 8 \Rightarrow$ $q = \frac{1}{2}$ და $\frac{b_1}{q-1} = -8 \Rightarrow$ $q = \frac{1}{2}$ და $b_1 = 4$.

მაშინ $b_n = b_1 q^{n-1}$, $\frac{1}{8} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow n = 6$.

პასუხი: $n = 6$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) იპოვა გეომეტრიული პროგრესიის ერთ-ერთი წევრი;
ბ) იპოვა გეომეტრიული პროგრესიის მნიშვნელი;
გ) მიიღო $\frac{b_1}{1-q}=8$; (ან მისი ტოლფასი);
დ) ჩაწერა $b_n = S_n - S_{n-1}$;
ე) მიიღო $b_n = \frac{4}{2^{n-1}}$; (ან მისი ტოლფასი);
ვ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა; ან ბ; ან გ; ან დ;
2 ქულა - ა, ბ; ან ე;
3 ქულა - ა, ბ, ვ; ან ე, ვ;

შენიშვნა. თუ გეომეტრიული პროგრესიის პირველი n წევრის ჯამი გამოთვალა რომელიმე ზოგადი ფორმულით და გაუტოლა $\frac{2^{n+2}-4}{2^{n-1}}$ გამოსახულებას (მაგალითად, დაწერა $\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}=\frac{2^{n+2}-4}{2^{n-1}}$), იწერება 1 ქულა.

(3) 32.

იპოვეთ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2^x-5}}+\log_{0,5}(13-3x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არე.

ამოხსნა

$f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $\begin{cases}13-3x>0\\2^x-5>0\end{cases}$ უტოლობათა სისტემის ამონახსნთა სიმრავლე. ამოვხსნათ უტოლობათა სისტემა

$$\begin{cases}13-3x>0\\2^x-5>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x<13\\2^x>5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<\dfrac{13}{3}\\x>\log_2 5\end{cases}.$$

რადგან $\log_2 5<\dfrac{13}{3}$, ამიტომ $f(x)$ ფუნქციის განსაზღვრის არეა $\left(\log_2 5,\ \dfrac{13}{3}\right)$.

პასუხი: $\left(\log_2 5,\ \dfrac{13}{3}\right)$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაწერა უტოლობა $13-3x>0$;
ბ) დაწერა უტოლობა $2^x-5>0$;
გ) ამოხსნა $2^x-5>0$ უტოლობა და მიიღო $x>\log_2 5$;
დ) მიიღო პასუხი.

შეფასების სქემა

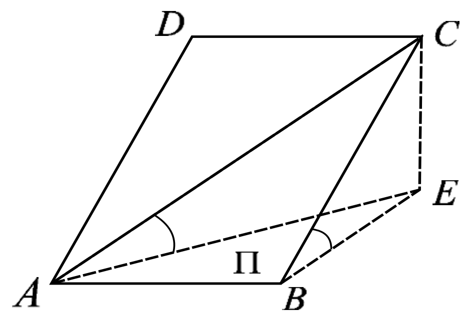
1 ქულა - ა; ან ბ;
2 ქულა - ა, ბ; ან გ;
3 ქულა - ა, ბ, დ.

შენიშვნა. თუ დაწერა $\begin{cases}13-3x\ge 0\\2^x-5\ge 0\end{cases}$ სისტემა და სწორად ამოხსნა მიღებული სისტემა, იწერება ერთი ქულა;
თუ დაწერა $\begin{cases}13-3x>0\\2^x-5\ge 0\end{cases}$ სისტემა და სწორად ამოხსნა მიღებული სისტემა, იწერება ორი ქულა;
თუ ამოხსნა $2^x-5\ge 0$ უტოლობა, იწერება 1 ქულა.

(3) 33.

$ABCD$ მართკუთხედის AB გვერდი Π სიბრტყეზე მდებარეობს, ხოლო მართკუთხედის სიბრტყე Π სიბრტყესთან ორწახნაგა α კუთხეს ადგენს. იპოვეთ AC დიაგონალის მიერ Π სიბრტყესთან შედგენილი კუთხის სინუსი, თუ $AB = m,\ BC = n.$

ამოხსნა



მართკუთხედის C წვეროდან Π სიბრტყეზე დაუშვათ CE მართობი და E წერტილი შევაერთოთ A და B წვეროებთან. რადგან BC მართობულია AB გვერდის, ამიტომ სამი მართობის თეორემის თანახმად მისი BE გეგმილიც მართობულია AB გვერდის და $\angle CBE$ არის მართკუთხედის სიბრტყის მიერ Π სიბრტყესთან შედგენილი ორწახნაგა კუთხის შესაბამისი ხაზოვანი კუთხე.

აქედან ვღებულობთ: $CE = BC \cdot \sin\angle CBE = n \cdot \sin\alpha$.

რადგან $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{m^2 + n^2}$, ამიტომ AC დიაგონალის მიერ Π სიბრტყესთან შედგენილი CAE კუთხის სინუსი ტოლია $\dfrac{CE}{AC} = \dfrac{n \cdot \sin\alpha}{\sqrt{m^2 + n^2}}$.

პასუხი: $\sin\angle CAE = \dfrac{n \cdot \sin\alpha}{\sqrt{m^2 + n^2}}$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) გამოთვალა AC მონაკვეთი, ან ნახაზზე აღნიშნა მართკუთხედის სიბრტყითა და Π სიბრტყით შექმნილი ორწახნაგა კუთხის შესაბამისი კუთხე, ან მიუთითა $\angle CAE$;
ბ) გამოთვალა CE მონაკვეთი;
გ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა: ა;
2 ქულა: ა, ბ;
3 ქულა: ა, ბ, გ.

შენიშვნები: თუ ნახაზი აგებულია სწორად და დაწერილია ტოლობა $\sin\angle CAE = \dfrac{CE}{\sqrt{m^2+n^2}}$ ან მისი ტოლფასი ტოლობა, იწერება 2 ქულა;

თუ $\sin\angle CAE$-ს ნაცვლად გამოთვალა $\cos\angle CAE$ ან $\mathrm{tg}\angle CAE$, იწერება 2 ქულა;

თუ პასუხში მიღებული აქვს გამოსახულება $\sin\angle CAE = \dfrac{m\cdot\sin\alpha}{\sqrt{m^2+n^2}}$, იწერება 2 ქულა.

(4) 34.

ორმა ტრაქტორმა ერთდროული მუშაობით მოხნა მიწის ნაკვეთი (ტრაქტორები მიწას ხნავენ მუდმივი სიჩქარეებით). ყოველი ჰექტრის მოხვნას პირველი ტრაქტორი $\frac{1}{80}$ საათით ნაკლებ დროს ანდომებდა, ვიდრე მეორე. ამის გამო პირველმა ტრაქტორმა 8 ჰექტრით მეტი ფართობი მოხნა, ვიდრე მეორემ. რას უდრის მეორე ტრაქტორის მიერ მოხნული მიწის ნაკვეთის ფართობი, თუ მხოლოდ პირველი ტრაქტორი მთლიან მიწის ნაკვეთს ხნავს $3,6$ საათში.

ამოხსნა

ვთქვათ ერთდროული მუშაობით მეორე ტრაქტორმა მოხნა x ჰექტარი. მაშინ პირველმა ტრაქტორმა მოხნა $x+8$ ჰექტარი. თუ მათ იმუშავეს t საათი, მაშინ პირველი ტრაქტორი ყოველ ჰექტარს მოხნავს $\frac{t}{x+8}$ საათში, ხოლო მეორე ტრაქტორი ყოველ ჰექტარს მოხნავს $\frac{t}{x}$ საათში. ამიტომ გვექნება განტოლება: $\frac{t}{x}-\frac{t}{x+8}=\frac{1}{80}$. მთელი ნაკვეთის ფართობია $2x+8$ ჰექტარი, რომელსაც პირველი ტრაქტორი მოხნავს $\frac{t}{x+8}(2x+8)=3,6$ საათში. მივიღეთ განტოლებათა სისტემა:

$$\begin{cases}\frac{t}{x}-\frac{t}{x+8}=\frac{1}{80}\\ \frac{t}{x+8}(2x+8)=3,6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{8t}{x(x+8)}=\frac{1}{80}\\ \frac{t}{x+8}(2x+8)=3,6\end{cases} \Rightarrow \frac{4}{x(x+4)}=\frac{1}{8\cdot 36} \Rightarrow x^2+4x-32\cdot 36=0 \Rightarrow x=32\cdot$$

პასუხი: 32 ჰა.

ამოხსნის ეტაპები

ა) გამოსახა საჭირო ცვლადებით თითოეული ტრაქტორის მიერ ერთი ჰექტრის მოსახნავად საჭირო დრო (მაგალითად $\frac{t}{x+8}$ ან $\frac{t}{x}$);

ბ) მიიღო ორუცნობიანი განტოლებათა სისტემა, საიდანაც შესაძლებელია საჭირო სიდიდის პოვნა (მაგალითად, $\begin{cases}\frac{t}{x}-\frac{t}{x+8}=\frac{1}{80}\\ \frac{t}{x+8}(2x+8)=3,6\end{cases}$ ან მისი ტოლფასი)

ან ერთი და იგივე უცნობით ჩაწერა ორი გამოსახულება, რომელთა გატოლებით მიღებული განტოლების ამოხსნა გვაძლევს საძიებელ სიდიდეს;

გ) მიიღო ერთუცნობიანი განტოლება საძიებელი სიდიდის მიმართ;

დ) პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა;
2 ქულა - ბ;
3 ქულა - ბ, გ;
4 ქულა - ბ, გ, დ.

შენიშვნა. იმ შემთხვევაში, თუ აბიტურიენტმა გამოიცნო პასუხი და შეამოწმა. რომ ის აკმაყოფილებს ამოცანის პირობებს, იწერება 2 ქულა.

(4) 35.

იპოვეთ a პარამეტრის ყველა იმ მნიშვნელობათა სიმრავლე, რომელთათვისაც $f(x)=x^2-(2a+1)x+2$ ფუნქცია $[-3;\,1]$ შუალედის თითოეულ წერტილზე იღებს დადებით მნიშვნელობებს.

ამოხსნა

შევნიშნოთ, რომ $f(x)$ ფუნქცია კლებადია $\left(-\infty,\ \frac{2a+1}{2}\right)$ ინტერვალში და ზრდადია $\left(\frac{2a+1}{2},\ \infty\right)$ ინტერვალში, ამიტომ განვიხილოთ სამი შემთხვევა: $\frac{2a+1}{2}\le -3$, $-3<\frac{2a+1}{2}<1$ და $\frac{2a+1}{2}\ge 1$.

შემთხვევა I:

$$\frac{2a+1}{2}\le -3 \Leftrightarrow a\in\left(-\infty;-\frac{7}{2}\right]. \tag{1}$$

ამ შემთხვევაში, როგორც შევნიშნეთ, $f(x)$ ფუნქცია ზრდადი იქნება $[-3;\,1]$-სეგმენტზე, შესაბამისად ამოცანის პირობას დავაკმაყოფილებთ, თუ მოვითხოვთ, რომ

$$f(-3)=9+6a+3+2>0, \tag{2}$$

საიდანაც მივიღებთ $a>-\frac{7}{3}$.

a-სთვის მიღებული ინტერვალების თანაკვეთა მოგვცემს ცარიელ სიმრავლეს.

შემთხვევა II:

$$-3<x_0=\frac{2a+1}{2}<1 \Leftrightarrow a\in\left(-\frac{7}{2};\ \frac{1}{2}\right). \tag{3}$$

ამ შემთხვევაში, ამოცანის პირობას დავაკმაყოფილებთ, თუ მოვითხოვთ, რომ $f(x)$ ფუნქციის უმცირესი მნიშვნელობა იქნება დადებითი, ე.ი.,

$$f(x_0)=\frac{-4a^2-4a+7}{4}>0. \tag{4}$$

რომლის ამონახსნია $a\in\left(-\frac{\sqrt{8}+1}{2};\ \frac{\sqrt{8}-1}{2}\right)$. მიღებული ინტერვალების თანაკვეთა გვაძლევს

$$a \in \left(-\frac{\sqrt{8}+1}{2};\ \frac{1}{2}\right). \tag{5}$$

შემთხვევა III:

$$\frac{2a+1}{2} \geq 1 \Leftrightarrow a \in \left[\frac{1}{2};\ \infty\right). \tag{6}$$

ამ შემთხვევაში, $f(x)$ ფუნქცია კლებადი იქნება $[-3;\ 1]$-სეგმენტზე, შესაბამისად ამოცანის პირობას დავაკმაყოფილებთ, თუ მოვითხოვთ, რომ

$$f(1) = 1 - 2a - 1 + 2 > 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty;\ 1)\ . \tag{7}$$

მიღებული ინტერვალების თანაკვეთა გვაძლევს $\left[\frac{1}{2};\ 1\right)$ ინტერვალს. (8)

სამივე შემთხვევაში მიღებული ინტერვალების გაერთიანებით მივიღებთ საბოლოო პასუხს $a \in \left(-\frac{\sqrt{8}+1}{2};\ 1\right)$.

პასუხი: $a \in \left(-\frac{\sqrt{8}+1}{2};\ 1\right)$.

ამოხსნის ეტაპები

ა) დაწერა (1), (3), (6) უტოლობებიდან ერთ-ერთი,

ან a პარამეტრის ერთი მაინც მნიშვნელობისთვის შეამოწმა რომ $f(x)$ ფუნქცია $[-3;\ 1]$ შუალედზე ღებულობს მხოლოდ დადებით მნიშვნელობებს;

ან დაწერა უტოლობა $D = (2a+1)^2 - 8 < 0$;

ბ) დაწერა (1), (3) და (6) სამივე უტოლობა,

ან ამოხსნა უტოლობა $D < 0$ და მიიღო $a \in \left(-\frac{\sqrt{8}+1}{2};\ \frac{\sqrt{8}-1}{2}\right)$;

ან შეადგინა სისტემა მაგ. $\begin{cases} D \ge 0 \\ \dfrac{2a+1+\sqrt{D}}{2} < -3 \end{cases}$, ან $\begin{cases} D \ge 0 \\ \dfrac{2a+1-\sqrt{D}}{2} > 1 \end{cases}$, ან $\begin{cases} \dfrac{2a+1}{2} \le -3 \\ f(-3) > 0 \end{cases}$, ან $\begin{cases} \dfrac{2a+1}{2} \ge 1 \\ f(1) > 0 \end{cases}$.

გ) ზემოთ განხილული სამი შემთხვევიდან სრულად გამოიკვლია რომელიმე ორი შემთხვევა;

დ) მიიღო პასუხი.

შეფასების სქემა

1 ქულა - ა;
2 ქულა - ბ;
3 ქულა - გ;
4 ქულა - ბ, გ, დ.

შენიშვნა. თუ პირველ ან მესამე შემთხვევაში $\dfrac{2a+1}{2} \ge 0$ ან $\dfrac{2a+1}{2} \le 0$ უტოლობების მაგივრად დაწერა შესაბამისად დაწერა მკაცრი უტოლობები ($\dfrac{2a+1}{2} > 0$ ან $\dfrac{2a+1}{2} < 0$), იწერება 1 ქულა.